PITAGORAS
ACADEMIA

ÁLGEBRA

Profesor
Freddy Ávalos C

DESIGUALDADES EN LOS REALES

DESIGUALDAD

Es aquella comparación que se establece entre números reales, mediante los símbolos de relación de orden:

$>$: se lee es mayor que
$<$: se lee es menor que

Símbolos estrictos

$\geq$: se lee es mayor o igual que
$\leq$: se lee es menor o igual que

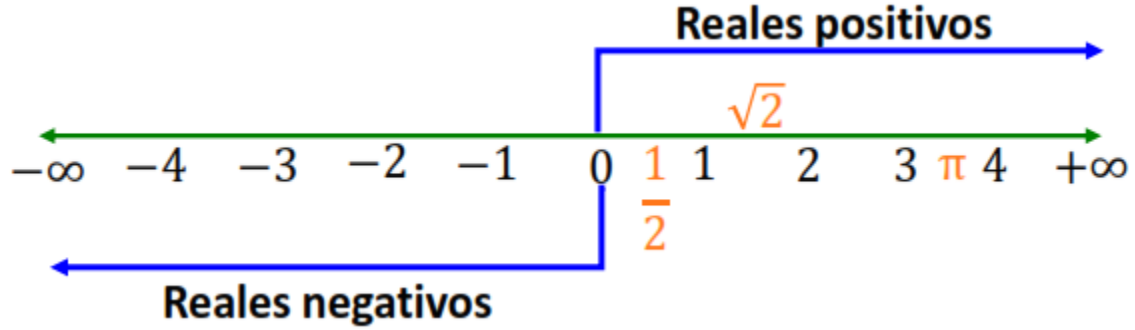
Símbolos NO estrictos

Ejemplos

$10 > 8$ $\quad -9 < 1$ $\quad 6 \geq 6$ $\quad x \leq 3$

RECTA NUMÉRICA REAL

Es aquella recta geométrica donde a cada punto de la recta le corresponde un único número real, es decir:



Donde

$+\infty, -\infty$: Ideales (símbolos que nos dan la idea de un número muy grande positivo o negativo).

INTERVALO

Un intervalo $\mathbf{I}$ es cualquier sub conjunto de $\mathbb{R}$, es decir:

$$\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

CLASES DE INTERVALOS

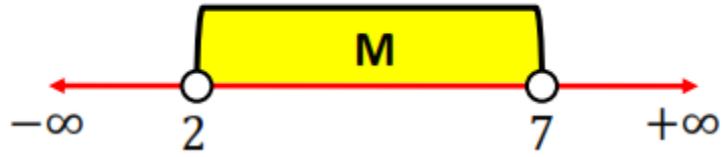
1. Intervalo acotado

Es aquel intervalo donde sus extremos son reales (FINITOS). Entre ellos tenemos:

1.1 Intervalo abierto

Es un intervalo en el cual **no se consideran** a sus extremos.

Ejemplo



Donde 2 y 7 son extremos de M

Notación

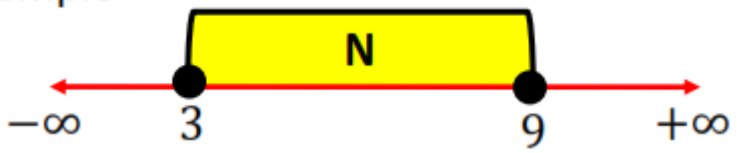
$M=\langle 2;7\rangle=]2;7[$ $M=\{x\in\mathbb{R}/2<x<7\}$

Observación : 2 y 7 no pertenecen a M

1.2 Intervalo cerrado

Es un intervalo en el cual **si se consideran** a sus extremos.

Ejemplo



Donde 3 y 9 son extremos de N

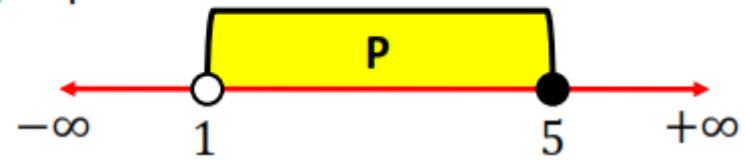
Notación $N=[3;9]$ $N=\{x\in\mathbb{R}/3\leq x\leq 9\}$

Observación : 3 y 9 pertenecen a N

1.3 Intervalo semiabierto

Es un intervalo donde un extremo es abierto y el otro cerrado.

Ejemplo



Donde 1 y 5 son extremos de P

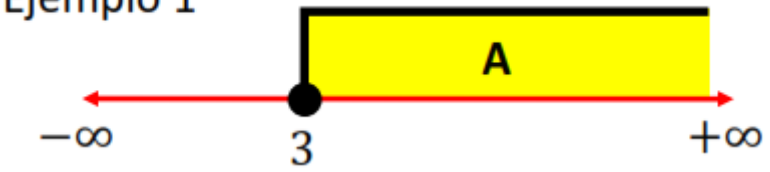
Notación $P=\langle 1;5]$ $P=\{x\in\mathbb{R}/1<x\leq 5\}$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

2. Intervalo NO acotado

Es aquel intervalo donde por lo menos un extremo es un ideal $(+\infty, -\infty)$.

Ejemplo 1



Notación

$A=[3;+\infty\rangle$ $A=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 3\}$

Ejemplo 2

Notación

$B=\langle-\infty;6\rangle$ $B=\{x\in\mathbb{R}/x<6\}$

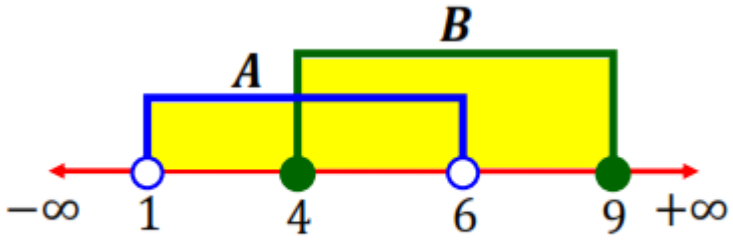
OPERACIONES CON INTERVALOS

Sean los intervalos A y B donde tenemos:

Unión o reunión $(A \cup B)$

Este intervalo se conforma por todos los **elementos comunes y no comunes** de A y B. Ejemplo

Sean los intervalos $A=\langle 1;6\rangle$ y $B=[4;9]$

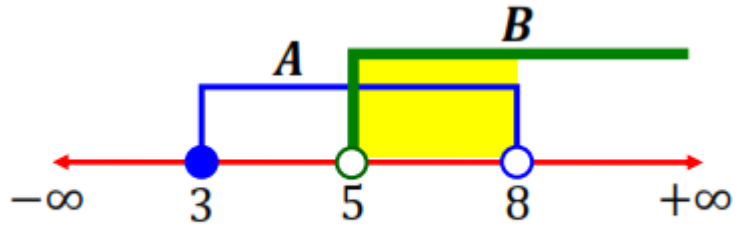


$A\cup B=\langle 1;9]$

Intersección $(A \cap B)$

Este intervalo se conforma solo por todos los **elementos comunes** de A y B. Ejemplo

Sean los intervalos $A=[3;8\rangle$ y $B=\langle 5;+\infty\rangle$



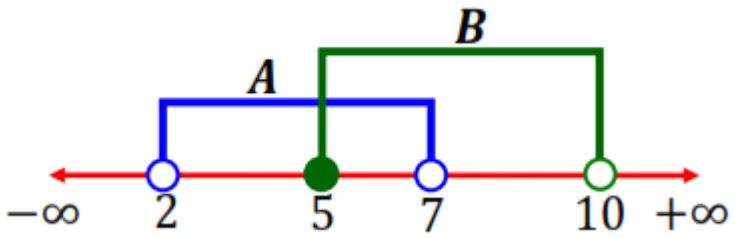
DESIGUALDADES EN LOS REALES

Diferencia $(A - B)$

Este intervalo se conforma por todos los elementos de A pero NO de B.

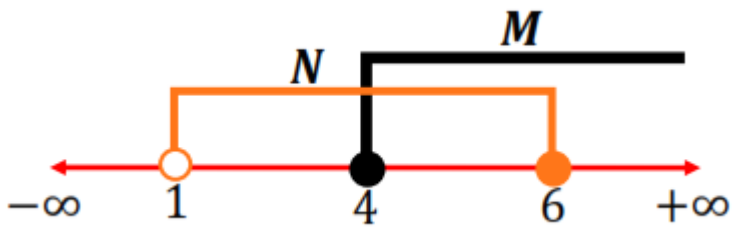
Ejemplos

Sean los intervalos $A = \langle 2; 7\rangle$ y $B = [5; 10\rangle$



$A - B = \langle 2; 5\rangle$ $B - A = [7; 10\rangle$

Sean los intervalos $M = [4; +\infty\rangle$ y $N = \langle 1; 6]$



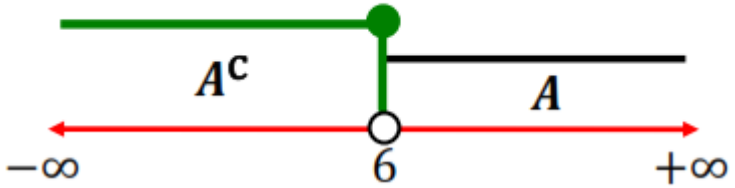
$M - N = \langle 6; +\infty\rangle$ $N - M = \langle 1; 4\rangle$

Complemento (A^C)

$$A^C = \{x \in \mathbb{R} / x \notin A\} = \mathbb{R} - A$$

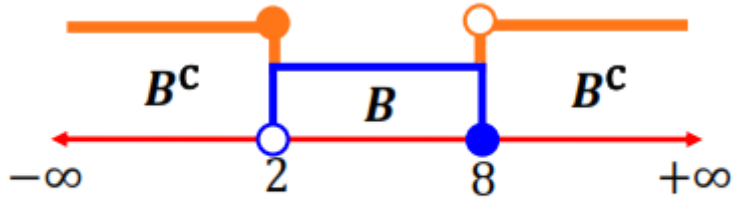
Ejemplos

Sea $A = \langle 6; +\infty\rangle$



$A^C = \langle -\infty; 6]$

Sea $B = \langle 2; 8]$



$B^C = \langle -\infty; 2] \cup \langle 8; +\infty\rangle$

$B^C = \langle -\infty; 2] \cup \langle 8; +\infty\rangle$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

TEOREMA SOBRE DESIGUALDADES

Sean a, b, c y d números reales, donde tenemos:

Teorema 1

Si $a < b \rightarrow a + c < b + c$

Si $a < b \rightarrow a - d < b - d$

Ejemplo

Si $2 < 5 \rightarrow 2 + 6 < 5 + 6$

$8 < 11$

Teorema 2

$$\text{Si } a < b \wedge c > 0 \rightarrow \begin{cases} a.c < b.c \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{cases}$$

Ejemplo

Si $3 < 7 \rightarrow 3.2 < 7.2$

$6 < 14$

Teorema 3

$$\text{Si } a < b \wedge d < 0 \rightarrow \begin{cases} a.d > b.d \\ \frac{a}{d} > \frac{b}{d} \end{cases}$$

Ejemplo

Si $-4 < 3 \rightarrow -4.(-5) > 3.(-5)$

$20 > -15$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

Teorema 4

Si $a < x < b \quad \wedge$

$c < y < d$

$\rightarrow a + c < x + y < b + d$

Ejemplos

1. Si $-2 < x < 5 \quad \wedge$

$3 < y < 7$

$\rightarrow -2 + 3 < x + y < 5 + 7$

$\rightarrow 1 < x + y < 12$

2. Si $1 \leq x \leq 4 \quad \wedge$

$2 \leq y < 5$

$\rightarrow 1 + 2 \leq x + y < 4 + 5$

$\rightarrow 3 \leq x + y < 9$

Teorema 5

Sean a, b, c, d

Si $a < x < b \quad \wedge$

$c < y < d$

$\rightarrow a + c < x.y < b + d$

Ejemplos

1. Si $3 < x < 6 \quad \wedge$

$2 < y < 5$

$\rightarrow 3.2 < x.y < 6.5$

$\rightarrow 6 < x.y < 30$

2. Si $4 \leq x < 7 \quad \wedge$

$5 \leq y \leq 9$

$\rightarrow 4.5 \leq x.y < 7.9$

$\rightarrow 20 \leq x.y < 63$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

Teorema 6

$$\text{Si } a > 0 \rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

$$\text{Si } b < 0 \rightarrow \frac{1}{b} < 0$$

Ejemplos

1. $4 > 0 \rightarrow \frac{1}{4} > 0$
2. $-6 < 0 \rightarrow -\frac{1}{6} < 0$
3. Si $(x-2) > 0 \rightarrow \frac{1}{x-2} > 0$

Teorema 7

Sea $ab > 0$ **(a y b del mismo signo)**

$$\text{Si } a < x < b \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{x} > \frac{1}{b}$$

Ejemplos

1. $2 < 4 < 5 \rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$

$\frac{1}{2} \downarrow 0,5$ $\quad \frac{1}{4} \downarrow 0,25$ $\quad \frac{1}{5} \downarrow 0,2$

2. $-6 < x \leq -3 \rightarrow -\frac{1}{6} > \frac{1}{x} \geq -\frac{1}{3}$

Teorema 8

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} \rightarrow a^2 \geq 0$$

Ejemplos

1. Si $x \in \mathbb{R}$

$(x-4) \in \mathbb{R} \rightarrow (x-4)^2 \geq 0$

2. Si $x \in \mathbb{R} \rightarrow$
   - $(x+1)^2 \geq 0$
   - $(x-3)^2 \geq 0$
   - $(2x+5)^2 \geq 0$

PITAGORAS ACADEMIA

DESIGUALDADES EN LOS REALES

Teorema 9

9.1 Sean a y b positivos
Si $a < x < b \rightarrow a^2 < x^2 < b^2$

Ejemplo

$$3 < x < 6$$
$$\rightarrow 3^2 < x^2 < 6^2$$
$$\rightarrow 9 < x^2 < 36$$

9.2 Sean a y b negativos
Si $a < x < b \rightarrow a^2 > x^2 > b^2$

Ejemplo

$$-7 < x < -4$$
$$\rightarrow (-7)^2 > x^2 > (-4)^2$$
$$\rightarrow 49 > x^2 > 16$$

9.3 Sea a negativo y b positivos
Si $a < x < b \rightarrow 0 \leq x^2 < \text{MÁX}\{a^2 ; b^2\}$

Ejemplos

1. $-2 < x < 5$
$\rightarrow 0 \leq x^2 < \text{MÁX}\{(-2)^2 ; 5^2\}$
$\rightarrow 0 \leq x^2 < \text{MÁX}\{4; 25\}$
$\rightarrow 0 \leq x^2 < 25$

2. $-8 < x < 4$
$\rightarrow 0 \leq x^2 < \text{MÁX}\{(-8)^2 ; 4^2\}$
$\rightarrow 0 \leq x^2 < \text{MÁX}\{64 ; 16\}$
$\rightarrow 0 \leq x^2 < 64$

3. $-7 \leq x < 3$
$\rightarrow 0 \leq x^2 < \text{MÁX}\{(-7)^2 ; 3^2\}$
$\rightarrow 0 \leq x^2 < \text{MÁX}\{49 ; 9\}$
$\rightarrow 0 \leq x^2 \leq 49$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

Teorema 10

Sean $a, b \wedge c$ positivos entonces

- $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$
- $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a.b.c}$

Ejercicio

Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $ab = 64$, calcule el menor valor de $a + b$.

Resolución

Como $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

64

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{64}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq 8$$

Por 2

$$a + b \geq 16$$

el menor valor de $a + b$ es 16

Consecuencias

Si $x > 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$

Si $x < 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

INECUACIÓN LINEAL

Forma general

$$ax + b \gtrless 0\,;\, a \neq 0$$

Donde el símbolo $\gtrless$ nos indicara:

$$>\quad \geq\quad <\quad \leq$$

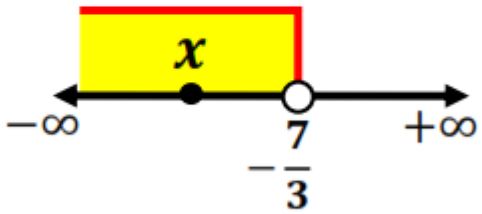
Resolución de una ecuación lineal

Ejemplos

1. $3x + 7 < 0$

$$3x < -7$$

$$x < -\frac{7}{3}$$



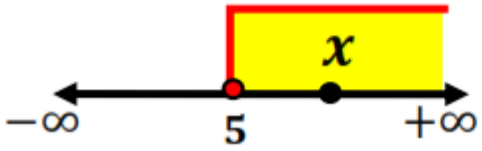
$$CS = \left\langle -\infty\,;\, -\frac{7}{3} \right\rangle$$

2. $-2x + 10 \leq 0$

$$-2x \leq -10 \quad \div (-2)$$

$$x \geq \frac{-10}{-2}$$

$$x \geq 5$$



$$CS = [5\,;\, +\infty\rangle$$

3. $\dfrac{3x-1}{2} + \dfrac{2x+1}{5} \leq 13$

$$\frac{5(3x-1) + 2(2x+1)}{2.5} \leq 13$$

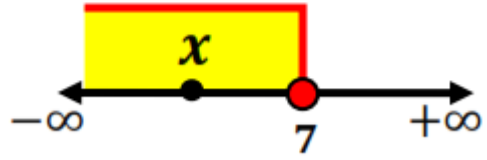
$$\frac{15x - 5 + 4x + 2}{2.5} \leq 13$$

$$19x - 3 \leq 130$$

$$19x \leq 133$$

$$x \leq \frac{133}{19}$$

$$x \leq 7$$



$$CS = \langle -\infty; 7]$$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

INECUACIONES CUADRÁTICAS

Forma general

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0\,;a \neq 0$$

Ejemplos

$\star\ 3x^2 + 4x + 1 > 0$

$\star\ x^2 + 2x + 7 \leq 0$

Resolución de una inecuación cuadrática

Para su resolución es importante que la inecuación tenga la forma general, es decir $\boldsymbol{ax^2 + bx + c \gtrless 0\,;a \neq 0.}$

Además que su coeficiente principal sea $(+)$, caso contrario multiplicar por -1, luego se pueden presentar 3 casos:

DESIGUALDADES EN LOS REALES

Caso I ($\Delta > 0$)

$ax^2 + bx + c$, tiene 2 raíces reales y diferentes.

Es decir tienes 2 puntos críticos, se aplica el **método de los puntos críticos**.

Para hallar los puntos críticos se aplica **aspa simple o fórmula general**.

Ejemplo 1 Resuelva

$$3x^2 + 2x - 7 > 4x^2 - 6x + 5$$

Le damos la forma general

$$-x^2 + 8x - 12 > 0$$

Garantizamos que el coeficiente principal sea $(+)$

$$-x^2 + 8x - 12 > 0 \quad \textbf{Por } -1$$

Factorizamos por aspa simple

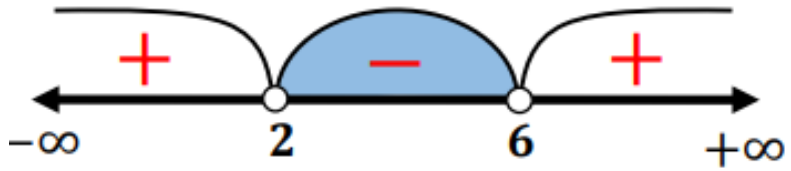
$$x^2 - 8x + 12 < 0$$

x -2

x -6

$$(x - 2)(x - 6) < 0$$

Puntos críticos: 2 y 6

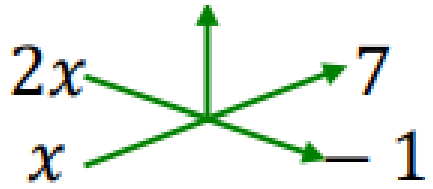


$CS = \langle 2 ; 6 \rangle$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

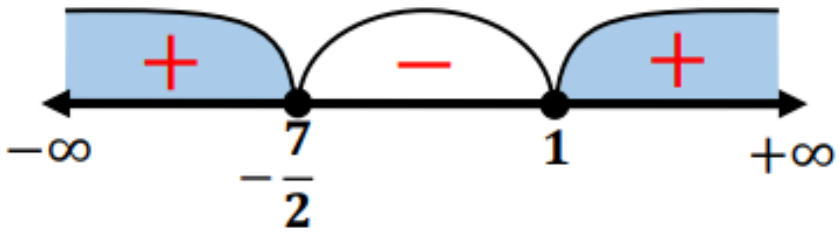
Ejemplo 2 Resuelva

$$2x^2 + 5x - 7 \geq 0$$



$$(2x + 7)(x - 1) \geq 0$$

Puntos críticos: $-\frac{7}{2}$ y 1



$$CS = \left\langle -\infty; -\frac{7}{2} \right] \cup [1; +\infty\rangle$$

Ejercicio

Si $3x^2 + bx + c < 0$, tiene $CS = \langle 2; 5\rangle$, calcule $b.c$.

Resolución

Del $CS = \langle 2; 5\rangle$ deducimos que 2 y 5 son los puntos críticos de $3x^2 + bx + c$.

⇨ 2 y 5 son raíces de $3x^2 + bx + c$.

Aplicamos el teorema de Cardano

$$* \quad 2 + 5 = -\frac{b}{3} \qquad * \quad 2.5 = \frac{c}{3}$$

$$-21 = b \qquad 30 = c$$

⇨ $b.c = (-21)(30) = \mathbf{-630}$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

Caso II ($\Delta = 0$)

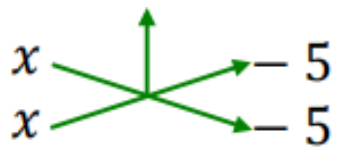
$ax^2 + bx + c$, tiene 2 raíces reales e iguales.

Para hallar su CS, hay que tomar en cuenta el siguiente teorema ya estudiado.

$$n^2 \geq 0 \; ; \; \forall \, n \in \mathbb{R}$$

Resuelva $2x^2 - 3x + 25 \geq x^2 + 7x$

$$x^2 - 10x + 25 \geq 0$$



$$(x-5)(x-5) \geq 0$$

$$\underbrace{(x-5)^2 \geq 0}_{\text{Siempre se cumple}} \Rightarrow CS = \mathbb{R}$$

Observación

Para las siguientes inecuaciones tenemos:

$(x-5)^2 \geq 0 \Rightarrow CS = \mathbb{R}$

$(x-5)^2 > 0 \Rightarrow CS = \mathbb{R} - \{5\}$

$(x-5)^2 < 0 \Rightarrow CS = \{\;\} = \emptyset$

$(x-5)^2 \leq 0 \Rightarrow CS = \{5\}$

Donde 5 es raíz doble de la cuadrática

DESIGUALDADES EN LOS REALES

Ejercicio Si $2x^2 + 6x + n + 3 \leq 0$, tiene CS $= \{\alpha\}$, calcule n.

Resolución

Del CS $= \{\alpha\}$ deducimos que α es raíz doble de $2x^2 + 6x + n + 3$, es decir que tiene raíces iguales ⇨ tiene $\Delta = 0$.

$$\cancel{6^2} - \cancel{4}(2)(n+3) = 0$$

$$9 - 2(n+3) = 0$$

$$9 - 2n - 6 = 0$$

$$3 = 2n \Rightarrow \frac{3}{2} = n$$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

Caso III ($\Delta < 0$)

Se recomienda aplicar el siguiente teorema:

Teorema del trinomio positivo

Sea $P_{(x)} = ax^2 + bx + c$.

$P_{(x)} > 0;\ \forall x \in \mathbb{R} \leftrightarrow a>0 \ \wedge\ \Delta < 0$

Ejemplo 1

Resuelva $3x^2 + 2x + 1 > 0$

Como la cuadrática no se puede factorizar por el aspa simple, analizaremos su Δ.

En $3x^2 + 2x + 1$, $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$

$$\Delta = 2^2 - 4(3)(1) = -8$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x + 1 > 0$$

$(+)$, **para todo x real**

$$\Rightarrow CS = \mathbb{R}$$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

Teorema del trinomio NO negativo

Sea $P_{(x)} = ax^2 + bx + c$.

$P_{(x)} \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R} \leftrightarrow a>0 \wedge \Delta \leq 0$

Aplicación

Determine los valores que toma b para que,

$3x^2 + bx + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Resolución

Como $3x^2 + bx + 3 \geq 0$, se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$

Aplicando el teorema del trinomio No negativo

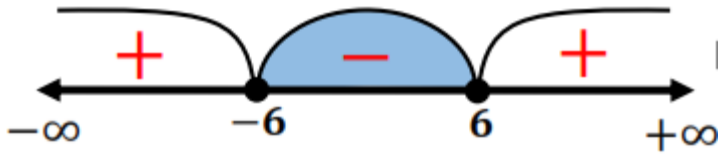
$$\Delta \leq 0$$

$$b^2 - 4(3)(3) \leq 0$$

$$b^2 - 36 \leq 0$$

$$(b + 6)(b - 6) \leq 0$$

Puntos críticos: 6 y -6



$$b \in [-6\,;6]$$

PITAGORAS ACADEMIA

DESIGUALDADES EN LOS REALES

La desigualdad de Cauchy–Schwarz

$\forall\ a_i\ ;\ b_i\ , son\ reales, se\ cumple$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (b_i)^2\right)$$

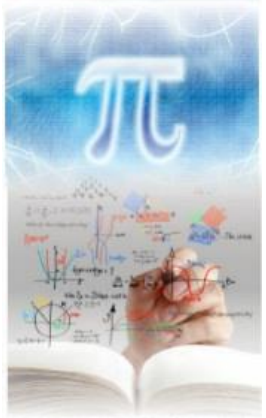
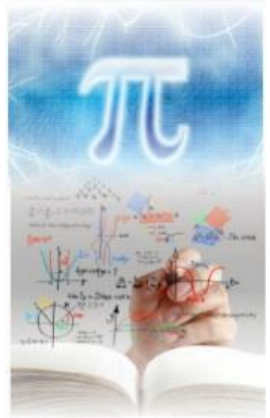
DESIGUALDADES EN LOS REALES

Media Cuadrática (Potencial)

La media cuadrática para una colección de N valores $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ reales positivos se cumple

$$\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}{N}}$$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

DESIGUALDADES EN LOS REALES

1. Determine el signo (> o <) que corresponde a cada relación.

I. $\sqrt[3]{3} \square \sqrt[5]{5}$

II. $-0{,}19 \square -0{,}199$

III. $e-\pi \square \sqrt{\pi}$

Luego, indique la secuencia correcta.

A) <; <; <

B) >; >; >

C) <; >; <

D) >; <; >

E) >; >; <

I) $(\sqrt[3]{3})^{15} \; ? \; (\sqrt[5]{5})^{15}$

$3^5 \; ? \; 5^3$

$243 \; ? \; 125$

II) $-0{,}19 \; ? \; -0{,}199$

$-190 \; ? \; -199$

III) $e-\pi \; ? \; \sqrt{\pi}$

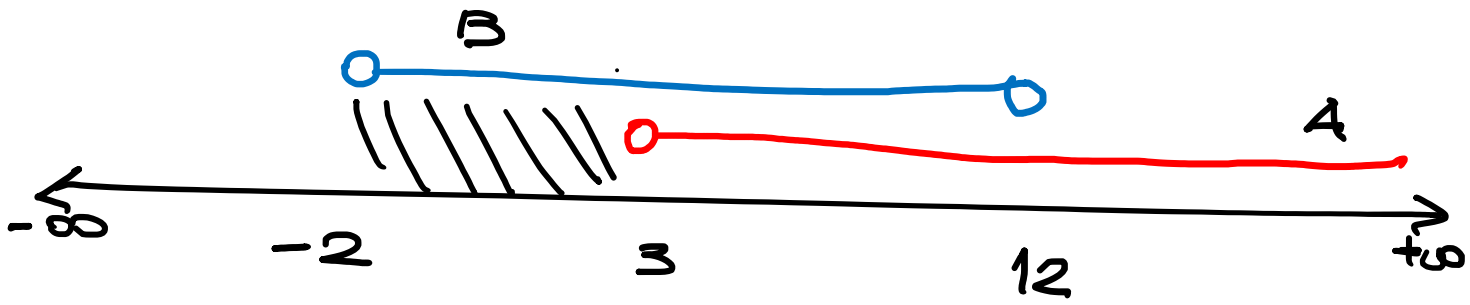
$2{,}7 \quad 3{,}1$

$(-) \; ? \; (+)$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

2. Si
$A=\{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$;
$B=\{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 12\}$,
determine $B-A$.

A) $\langle 3; 12\rangle$ B) $\langle -2; 12]$ C) $\langle -2; 3]$
D) $\langle -2; 3\rangle$ E) $[-2; 3]$



B − A es sólo B → B − A = ⟨−2; 3]

DESIGUALDADES EN LOS REALES

3. Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda.

I. $\langle -\infty; 5\rangle \cap \langle 3; +\infty\rangle = \langle 3; 5\rangle$ V

II. $\langle -6; 1\rangle - \langle -1; 6\rangle = \langle -6; -1\rangle$ F

III. $[-1; 2\rangle - \{0\} = [-1; 0\rangle \cup \langle 0; 2\rangle$ V

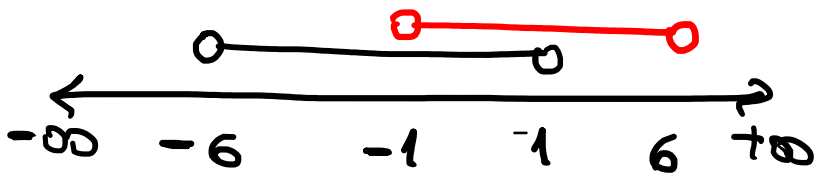
A) FVV B) VFF C) VFV

D) FFV E) FFF

I)

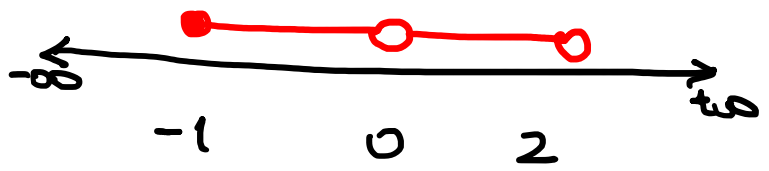
$\langle 3; 5\rangle$

II)



$\langle -6; -1]$

III)



$[-1; 0\rangle \cup \langle 0; 2\rangle$

∴ VFV

DESIGUALDADES EN LOS REALES

4. Sea $f_{(x)} = \dfrac{1}{2x+1}$, de modo que $f_{(x)} \in [1; 8]$.

Entonces, ¿cuál es el menor valor de x?

A) $-7/16$ B) $-5/15$ C) $-1/8$
D) $5/16$ E) $7/8$

Solución:

$f(x) \in [1;8] \rightarrow \quad 1 \leq f(x) \leq 8$

$$1 \leq \frac{1}{2x+1} \leq 8$$

Invertir:

$$1 \geq 2x+1 \geq \frac{1}{8}$$

restar 1:

$$0 \geq 2x \geq -\frac{7}{8}$$

por $\frac{1}{2}$:

$$0 \geq x \geq -\frac{7}{16}$$

$$x \in \left[-\frac{7}{16}; 0\right]$$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

5. Si $M=[2;5\rangle$, señale el supremo del conjunto A, tal que

$$A=\left\{z\in\mathbb{R}/\ z=\frac{x+1}{x}\wedge x\in M\right\}.$$

A) 6/5 B) 2 C) 11/2
D) 3/2 E) 2/3

Solución:

$$Z=\frac{x+1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\rightarrow \boxed{Z=1+\frac{1}{x}}$$

$x\in M\wedge M=[2;5\rangle \rightarrow 2\leq x<5$

Invertir: $\frac{1}{2}\geq\frac{1}{x}>\frac{1}{5}$

Sumar 1: $1+\frac{1}{2}\geq 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{5}$

$$\frac{3}{2}\geq \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{z}>\frac{6}{5}$$

$\frac{6}{5}<z\leq\frac{3}{2}$ $\leftarrow$ Sup

$\therefore M=\langle\frac{6}{5};\frac{3}{2}]$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

6. Halle la variación de la expresión $\frac{1}{x+6}$ si se sabe que $(2x-1) \in [-5; 7]$.

A) $[1; 20]$

B) $\left[\frac{1}{10}; \frac{1}{4}\right]$

C) $\left[-1; \frac{1}{10}\right]$

D) $\langle -4; 0]$

E) $\left\langle 0; \frac{1}{5}\right]$

Solución:

Dato: $-5 \leq 2x-1 \leq 7$

$-4 \leq 2x \leq 8$

$-2 \leq x \leq 4$

Luego: $4 \leq x+6 \leq 10$

Invertir $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{x+6} \geq \frac{1}{10}$

$\therefore \frac{1}{x+6} \in \left[\frac{1}{10}; \frac{1}{4}\right]$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

7. Dados los intervalos

$A=\{(x-2)\in\mathbb{R}/5\leq 2x+1<7\}$

$B=\left\{(x-1)\in\mathbb{R}/\frac{x}{2}\in A\right\}$

Determine $(A-B)\cup(B-A)$.

A) $[-1;1]$ B) $[-1;0]$ C) $\langle -1;1\rangle$

D) $[-1;0\rangle$ E) ϕ

$\phi \cup A = A$

$\phi \cap A = \phi$

A:

$5\leq 2x+1<7$

$4\leq 2x<6$

$2\leq x<3$

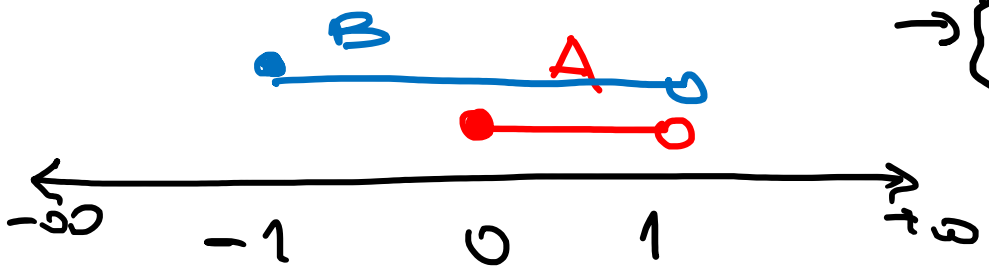
$0\leq x-2<1 \rightarrow A=[0;1)$

B:

$0\leq \frac{x}{2}<1 \rightarrow 0\leq x<2$

$-1\leq x-1<1$

$\rightarrow B=[-1;1\rangle$



$\rightarrow A-B=\emptyset \wedge B-A=[-1;0\rangle$

Luego: $\underbrace{(A-B)}_{\phi} \cup (B-A) = B-A=[-1;0\rangle$

PITAGORAS ACADEMIA

DESIGUALDADES EN LOS REALES

8. Si

$A=\langle 1;6]$,

$B=\left\{x\in\mathbb{Z}/\left(\frac{3x-2}{4}\right)\in A\right\}$,

determine $\ell_{(A-B)}$.

A) 10 B) 3 C) 5

D) 6 E) 4

$A=\langle 1;6]$

$B=\{x\in\mathbb{Z}/\ 1<\frac{3x-2}{4}\leq 6\}$

$4<3x-2\leq 24$

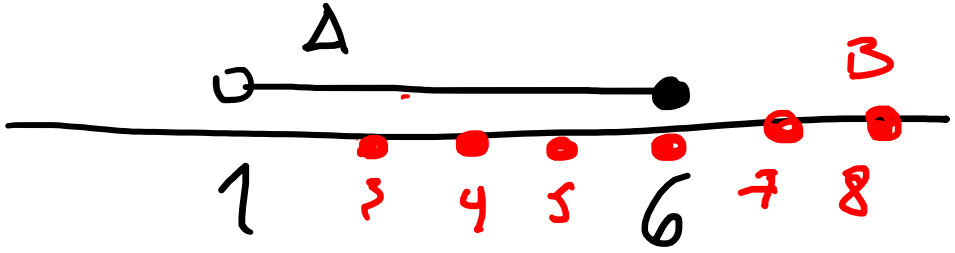
$6<3x\leq 26$

$2<x\leq 8,6$

$B=\{3;4;5;6;7;8\}$

$A=[m;n\rangle \Rightarrow \ell_A=n-m$

$\Rightarrow A-B=\langle 1;3\rangle \cup \langle 3;4\rangle \cup \langle 4;5\rangle \cup \langle 5;6\rangle = 2+1+1+1=5$



DESIGUALDADES EN LOS REALES

9. Si $x \in \mathbb{Z}^+$ es un número que verifica las siguientes desigualdades:

$y+3 > 2x \wedge 3x < 12-y$

calcule la suma de todos los valores de x.

A) 3
B) 6
C) 10
D) 15
E) no existe tal suma.

DESIGUALDADES EN LOS REALES

10. Dado el conjunto

$$M=\left\{x\in\mathbb{R}\Big/\left(\frac{3x-1}{3}\right)\in\left\langle-\frac{7}{2};\frac{51}{5}\right]\right\}$$

Halle el valor de $m+n$ si se sabe que m es la mayor cota inferior entera, y n es la menor cota superior entera.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PITAGORAS ACADEMIA

DESIGUALDADES EN LOS REALES

11. Si $(2x+1) \in \langle 0; 7 \rangle$, ¿cuántos valores enteros no toma la expresión $1/x$?

A) 6 B) 5 C) 4
D) 3 E) 2

DESIGUALDADES EN LOS REALES

12. Determine la variación de $\frac{3y+1}{2x+1}$ si se sabe que $4 \leq x \leq 7 \wedge 2 \leq y \leq 10$.

A) $\left[7; \frac{31}{9}\right]$ B) $\left[\frac{7}{15}; \frac{31}{9}\right]$ C) $[7; 31]$

D) $\left[8; \frac{31}{2}\right]$ E) $\left[8; \frac{32}{3}\right]$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

13. Si $f_{(x)} = -(x-2)(x-6) \wedge x \in [3; 5\rangle$; determine la variación de $f_{(x)}$.

A) $[-3; 4]$ B) $\langle -3; 4]$ C) $\langle 3; 4\rangle$
D) $\langle 3; 4]$ E) $[3; 4]$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

14. Si $x \in \mathbb{R}^+$, calcule el mínimo valor de J.

$$J = \frac{x}{3} + \frac{6}{x}$$

A) $2\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{2}$
C) 1
D) 0
E) 6

DESIGUALDADES EN LOS REALES

15. Sean $x; y \in \mathbb{R}^+$, tales que $x+y=6 \wedge xy=9$. Calcule el valor de x^y.

A) 2 B) 3 C) 27
D) 81 E) 18

$MA \geq MG$

Como $x; y \in \mathbb{R}^+$:

$MA = \frac{x+y}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$MG = \sqrt{xy} = \sqrt{9} = 3$

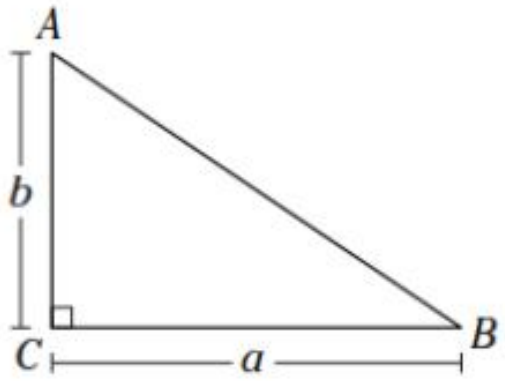
$\therefore MA = MG \rightarrow x = y$

Se cumple: $x = 3 \wedge y = 3$

$\therefore x^y = 3^3 = 27$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

16. Del siguiente gráfico,



calcule el mayor valor de $2a+b$ si $AB=1$.

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{2}$

Solución:

Del gráfico: $a^2+b^2=1$

Por Cauchy:

$$(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$2 \quad 1$$

$$(2a+b)^2 \leq 1 \times (2^2+1^2)$$

$$(2a+b)^2 \leq 5$$

$$\rightarrow -\sqrt{5} \leq 2a+b \leq \sqrt{5}$$

$$\therefore (2a+b)_{máx} = \sqrt{5}$$

DESIGUALDADES EN LOS REALES

17. Si $7 \leq 2x+5 \leq 13 \wedge \frac{4}{3} \leq \frac{2y}{3} \leq 4$, entonces la variación de $x+y$ es el intervalo A, y $\frac{6x}{y}$ varía en el intervalo B. Halle $A \cap B$.

A) $\langle 2; 10]$ B) $\langle 3; 12\rangle$ C) $[6; 10]$
D) $[3; 6]$ E) $[3; 10]$

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS